



*Uplifting Mathematics for All*

# ***Guia didàctica***

## ***Punts que exploten***

### ***(Exploding Dots™)***

## **Experiència 6:**

# **Totes les bases, i totes alhora: els polinomis**

<b>Visió general</b>	<b>2</b>
<b>La divisió en qualsevol base</b>	<b>3</b>
Material A: <i>La divisió en qualsevol base</i>	6
Solucions a les preguntes de «Material A»	8
<b>¡Problema!</b>	<b>9</b>
<b>Solució</b>	<b>10</b>
Material B: <i>Problema i solució</i>	13
Solucions a les preguntes de «Material B»	15
Material C: <i>Exploracions brutals</i>	16

### **Recursos relacionats:**

- Podeu accedir als vídeos i més recursos a [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accedeix a [actividades guiadas en Desmos](#).
- Joga en línia amb el giny de [Dhimad](#) (inclou àlgebra).

## Visió general

### Objectius de l'alumne

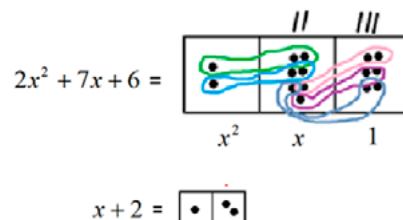
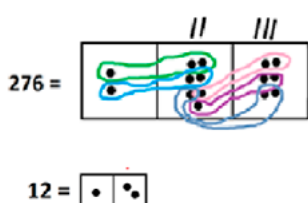
Tot el que hem fet a les lliçons anteriors es pot fer en qualsevol base: les matemàtiques no prefereixen la base deu a les altres. Treballant amb una base qualsevol,  $x$ , obtenim l'àlgebra dels polinomis, que es considera una extensió natural de l'aritmètica en base deu.

### Breu resum de l'experiència

Els humans tenim predilecció per la base deu, però les matemàtiques no! Tot el que hem fet a les lliçons anteriors es pot fer en qualsevol base.

Siguem agosarats i treballem amb totes les bases alhora! Treballem amb una màquina  $1 \leftarrow x$ , on  $x$  és un valor qualsevol al qual podem assignar el deu, el dos o el valor de base que vulguem.

Els objectes d'una màquina  $1 \leftarrow x$  s'anomenen *polinomis*, i l'àlgebra dels polinomis és, en realitat, una repetició de l'aritmètica en base deu. Per exemple, fixeu-vos en aquesta operació aritmètica de primària,  $276 \div 12$ , i en aquesta operació d'àlgebra de secundària,  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ . Veiem que són idèntiques, amb les solucions 23 i  $2x + 3$ , respectivament. (I si triem el 10 per a  $x$ , la segona operació ACABA SENT COM la primera!)



I si acceptem polinomis amb coeficients negatius, se'ns plantejarà un repte interessant. (Això no és gaire habitual en l'aritmètica en base deu.)

### Introducció

Podeu veure el vídeo de benvinguda, en què James introdueix aquesta experiència, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [1:12 minuts].

## La divisió en qualsevol base

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [9:59 minuts].

Aquí hi ha el guió que segueix James quan explica la lliçó a la pissarra. No cal dir que podeu adaptar-lo com més us convingui. Al vídeo podreu veure quan i com dibuixa James els diagrames i com els va ampliant.

Molt bé. Fins aquí hem treballat l'aritmètica de primària. Anem ara a l'àlgebra avançada de secundària.

Ostres...

Bé, la realitat és que no té cap complicació. Ja hem fet tota la feina.

L'única cosa que hem d'entendre és que la màquina  $1 \leftarrow 10$  no té res d'especial. Si volguéssim, tota l'aritmètica de primària la podríem fer en una màquina  $1 \leftarrow 2$ , o en una màquina  $1 \leftarrow 5$  o, fins i tot, en una màquina  $1 \leftarrow 37$ . A les mates els és igual en quina màquina ho fem. És només que els humans tenim predilecció pel nombre deu i tendim cap a la màquina  $1 \leftarrow 10$ .

Repassem ara bona part del que hem fet. Però, aquest cop, ho farem en totes les màquines possibles alhora!

Sembla una bogeria, però és la cosa més senzilla del món.

**Espero que hàgiu seguit el meu consell i hagueu mantingut a la pissarra la imatge de  $276 \div 12 = 23$  en una màquina  $1 \leftarrow 10$ . (Si no ho heu fet, improviseu, que ara ve un moment clau.)**

Bé, ara dibuixaré una màquina a la pissarra, però no us diré quina. Podria ser una altra màquina  $1 \leftarrow 10$ , però no penso dir-ho. Pot ser que sigui una màquina  $1 \leftarrow 2$ , o una màquina  $1 \leftarrow 4$  o una màquina  $1 \leftarrow 13$ . El cas és que no ho sabreu perquè no ho diré. No em ve de gust i ja està.

En l'àlgebra de secundària hi ha una lletra que, pel que sembla, és la preferida per representar una quantitat de la qual no es coneix el valor. És la lletra  $x$ .

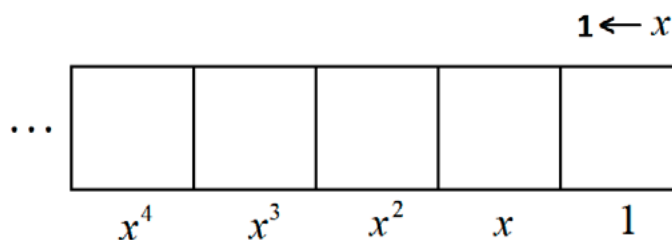
Treballem, doncs, amb una màquina  $1 \leftarrow x$  on la lletra  $x$  representa una xifra de la qual no sabem el valor.

En una màquina  $1 \leftarrow 10$ , els valors posicionals de les caselles són les potències de deu: 1, 10, 100, 1000...

En una màquina  $1 \leftarrow 2$ , els valors posicionals de les caselles són les potències de dos: 1, 2, 4, 8, 16...



I així successivament. Per tant, en una màquina  $1 \leftarrow x$ , els valors posicionals de les caselles seran les potències de  $x$ :



Fem una prova: si us dic que, al meu cap,  $x$  és 10, les potències  $1, x, x^2, x^3 \dots$  es correspondran amb els nombres 1, 10, 100, 1000..., cosa que és correcta per a una màquina  $1 \leftarrow 10$ . Però si us dic que, en realitat, al meu cap  $x$  és 2, les potències  $1, x, x^2, x^3 \dots$  es correspondran amb els nombres 1, 2, 4, 8..., cosa que és correcta per a una màquina  $1 \leftarrow 2$ .

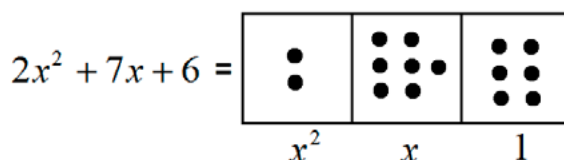
Aquesta màquina  $1 \leftarrow x$ , en realitat, representa totes les màquines alhora!

Molt bé. Ara, sense avisar, tenim aquesta operació d'àlgebra avançada de secundària.

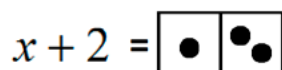
**Calculeu  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$**

Escric l'operació a la pissarra i insisteixo als alumnes que s'hi posin, per molta por que els faci. Sovint hi ha alguna resistència inicial, però els alumnes acaben superant els nervis i s'empesquen alguna cosa: posen dos punts a la casella de  $x^2$ , set a la casella de  $x$  i sis a la casella d'1. Tot seguit, solen dibuixar  $x + 2$  com un punt a continuació de dos punts, i comencen a buscar aquest patró a la imatge de  $2x^2 + 7x + 6$ . Quan ja ha passat un temps raonable, entro jo:

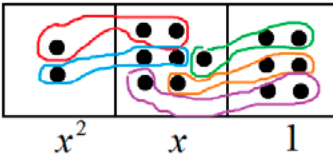
Així es veu  $2x^2 + 7x + 6$  en una màquina  $1 \leftarrow x$ : dos  $x^2$ , set  $x$  i sis uns.



I així es veu  $x + 2$ .



La divisió  $2x^2 + 7x + 6 \div (x + 2)$  ens demana que trobem còpies de  $x + 2$  a la imatge de  $2x^2 + 7x + 6$ .

$$2x^2 + 7x + 6 =$$


$$x + 2 =$$

Hi veig dues còpies de  $x + 2$  en el nivell  $x$  i tres còpies en el nivell 1. La solució és  $2x + 3$ .



**Mireu fixament la imatge de  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$ . Us sona?**

Aquí, normalment, recolzo l'esquena a la paret i, amb una mà, senyalo la imatge anterior de  $276 \div 12$  i, amb l'altra mà, senyalo la nova imatge de  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ .

Les imatges són idèntiques!

Acabem de fer una operació d'àlgebra de secundària com si fos una operació aritmètica de primària!

En una màquina  $1 \leftarrow 10$

$$276 \div 12 = 23$$



En una màquina  $1 \leftarrow x$

$$(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$$

**MATEIXA IMATGE!**

Què ha passat?

Imagineu-vos que us he dit que, en realitat, al meu cap  $x$  era 10 tota l'estona. Aleshores,  $2x^2 + 7x + 6$  és el nombre  $2 \times 10 + 7 \times 10 + 6$ , que és 276; i  $x + 2$  és el nombre  $10 + 2$ , és a dir, 12. Per tant, hem calculat  $276 \div 12$ . I, com que us he dit que  $x$  és 10, hem obtingut el resultat  $2x + 3$ , que és  $2 \times 10 + 3 = 23$ .

Per tant, acabem de repetir un problema aritmètic de primària!

**A part:** Per cert, si ara us dic que  $x$  era 2, aleshores

$$2x^2 + 7x + 6 = 2 \times 4 + 7 \times 2 + 6, \text{ que és } 28,$$

$$x + 2 = 2 + 2, \text{ que és } 4,$$

i

$$2x + 3 = 2 \times 2 + 3, \text{ que és } 7.$$

Acabem de calcular  $28 \div 4 = 7$ , i és correcte!



Fer divisions en una màquina  $1 \leftarrow x$  és, en realitat, fer un nombre infinit de divisions de cop. Guau!



Intenteu calcular  $(2x^3 + 5x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$  en una màquina  $1 \leftarrow x$  per obtenir la solució  $2x^2 + x + 3$ . (I si us dic que, al meu cap,  $x$  és 10, veieu que això es correspon amb  $2256 \div 12 = 213$ ?)

Deixeu als alumnes que ho provin.

Normalment, a secundària els nombres expressats en una màquina  $1 \leftarrow x$  s'anomenen *polinomis*. Són com els nombres expressats en base 10, excepte que ara són «nombres» expressats en base  $x$ . (I si algú us diu que  $x$  és 10, no hi dubteu: són nombres en base 10!)

Tenir això en compte fa que bona part de l'àlgebra de secundària sigui tan senzilla: és una repetició de l'aritmètica en base 10 de primària.



Normalment, deixo als alumnes que intentin fer aquesta altra, en forma de fracció:

$$\frac{(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + 3)}$$

(La solució és  $x^2 + 2x + 1$ .)

## Material A: La divisió en qualsevol base

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 6.*)



## Punts que exploten

### Experiència 6: Totes les bases, i totes alhora: els polinomis

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### Material B: La divisió en qualsevol base

Les operacions  $276 \div 12$  i  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$  són idèntiques!

En una màquina  $1 \leftarrow 10$

$$\begin{array}{r} 276 \div 12 \\ = 23 \end{array}$$



MATEIXA IMATGE!

En una màquina  $1 \leftarrow x$

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) \\ = 2x + 3 \end{array}$$

Aquí teniu uns enunciats que podeu plantejar, si voleu:

1. a) Calculeu  $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$ .

b) Calculeu  $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1)$ .

Si us dic que  $x$  és 10 en totes dues operacions, quines dues divisions acabeu de calcular en aritmètica normal?

2. Aquí tenim una divisió de polinomis en forma de fracció. Podeu fer-la? (Hi ha alguna petita dificultat que calgui tenir en compte?)

$$\frac{(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + 3)}$$

3. Demostreu que  $(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$  equival a  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ .

a) Quin és el resultat amb  $x = 10$ ?

b) Quin és el resultat amb  $x = 2$ ?

c) Quin és el resultat quan  $x$  equival a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 11?

d) Quin és el resultat amb  $x = 0$ ?

e) Quin és el resultat amb  $x = -1$ ?



## Solucions a les preguntes de «Material A»

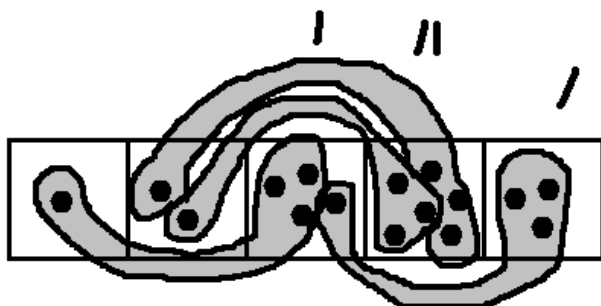
1.

a)  $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 1.$

b)  $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3.$

I si resulta que  $x$  és 10, el que acabem de calcular és  $23541 \div 21 = 1121$  i  $13653 \div 111 = 123$ .

2. Sí que podem. La solució és  $x^2 + 2x + 1$ .



3.

a) Amb  $x = 10$  seria  $14641 \div 11 = 1331$ .

b) Amb  $x = 2$  seria  $81 \div 3 = 27$ .

c) Amb  $x = 3$  seria  $256 \div 4 = 64$ .

Amb  $x = 4$  seria  $625 \div 5 = 125$ .

Amb  $x = 5$  seria  $1296 \div 6 = 216$ .

Amb  $x = 6$  seria  $2401 \div 7 = 343$ .

Amb  $x = 7$  seria  $4096 \div 8 = 512$ .

Amb  $x = 8$  seria  $6561 \div 9 = 729$ .

Amb  $x = 9$  seria  $10000 \div 10 = 1000$ .

Amb  $x = 11$  seria  $20736 \div 12 = 1728$ .

d) Amb  $x = 0$  seria  $1 \div 1 = 1$ .

e) Amb  $x = -1$  seria  $0 \div 0 = 0$ . Mmm. Que estrany...! (Podem tenir una màquina  $1 \leftarrow 0$ ?)



## Problema!

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:37 minuts].

Molt bé. Ara que tots estem molt còmodes fent àlgebra avançada, us he de confessar una cosa: us he ensarronat!

He triat exemples pensats perquè siguin interessants i flueixin sense problemes. La veritat, però, és que aquest fantàstic mètode nostre no sol funcionar tan bé.

Fixeu-vos en aquest exemple:

$$\frac{(x^3 - 3x + 2)}{(x + 2)}$$

Hi veieu el que he estat evitant fins ara? Exacte: els nombres negatius.

Això és el que veig en una màquina  $1 \leftarrow x$ :

$$x^3 - 3x + 2 =$$

•		○ ○ ○	• •
---	--	-------	-----

$$x+2 =$$

•	• •
---	-----

Estem buscant, a la imatge de  $x^3 - 3x + 2$ , un punt seguit de dos punts, i no en veig cap!

Per tant, què hi podem fer, a part de plorar una mica?

Se us acut res?

Deixo als alumnes que hi donin voltes, i els insisteixo que és un mètode que falla.

En algun moment, algú proposarà la idea de fer no explotar un dels punts situats a l'esquerra del tot. Quina bona idea! Ho és, realment. Però té una pega: no sabem quin valor té  $x$ ; per tant, no sabem quants punts hem de dibuixar quan fem la no explosió. Vaja...

La meua enhorabona a qui hagi proposat aquesta brillant idea. Lamento que al final no hagi estat útil.

Necessitem una gran revelació que ens digui alguna cosa intel·ligent per fer. O potser és que els polinomis amb nombres negatius no es poden resoldre amb punts i caselles.

Què en penseu, doncs? Alguna revelació?

## Solució

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:  
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [5:55 minuts].

Estem encallats

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

amb la imatge de la màquina  $1 \leftarrow x$ :

$$x^3 - 3x + 2 =$$

•		○ ○ ○	• •
---	--	-------	-----

$$x+2 =$$

•	• •
---	-----

Estem buscant còpies de  $x^3 - 3x + 2$ , un punt seguit de dos punts, en qualsevol posició de la imatge de  $x^3 - 3x + 2$ . I no en veiem cap!

I no podem ajudar-nos fent no explotar punts, ja que desconexem el valor de  $x$ . (No sabem quants punts hem de dibuixar per fer no explosions.)

Sembla que estem en una situació desesperada.

Però us puc aconsellar una cosa que, de fet, és una lliçó de vida. Això:



**SI VOLS ALGUNA COSA EN LA VIDA, FES-LA POSSIBLE! (I atén-te a les conseqüències.)**

Ara mateix, hi ha res que vulguem a la vida?

Fixeu-vos en el punt solitari de l'esquerra. No seria bonic tenir dos punts a la casella del costat i, així, obtenir una còpia de  $x + 2$ ?

Va, posem dos punts en la casella buida! Això és el que vull, així que ho faré possible!

Però n'hi ha conseqüències: se suposa que la casella és buida; així doncs, perquè segueixi buida, hi podem afegir dos antipunts.



$x^3 - 3x + 2 =$

●	●● ●●	○● ○●	●●
---	----------	----------	----





$x+2 =$

●	●●
---	----



Genial!

Ara sí que tenim una còpia del que busquem.

$x^3 - 3x + 2 =$

			
---	---	--	---

$x+2 =$

	
---	---

Potser algun alumne ha proposat afegir punts i antipunts. Doncs seguïu-li el fil, però eviteu els termes especialitzats que pugui fer servir (com ara «parell zero»). Jo ho reformulo en paraules senzilles.

Continuo parlant de la «llicó de vida», i els dic que «la PAULA ha après una gran llicó de vida».

Però la pregunta encara hi és: aquesta idea tan brillant, és útil?

Mmm.

Bé. Hi ha alguna cosa més a la vida que vulgueu ara mateix? Podeu crear una altra còpia de  $x+2$  en algun lloc?

Personalment, a mi m'agradaria un punt a l'esquerra del parell de punts situats a la casella de més a la dreta. Ho faré possible! Afegiré un punt i un parell d'antipunts. Així aconseguiré una altra còpia de  $x+2$ .

$x^3 - 3x + 2 =$

$x+2 =$

Cap problema amb això, però ens hem quedat encallats? Potser aquesta idea tan brillant no és útil, al final.

Aquí faig una pausa. Potser algun alumne pregunta què farem a continuació. Si és així, segueix el fil.

Mireu aquesta imatge un moment. Hi veieu res?



Fixeu-vos-hi bé i començareu a veure còpies de l'oposat exacte del que estem buscant! En lloc d'un punt seguit de dos punts, hi ha còpies d'un antipunt seguit de dos antipunts.

$$x^3 - 3x + 2 =$$

$$x+2 =$$

Guau!

I com la llegim, la solució? Veiem que  $(x^3 - 3x + 2) \div (x + 2)$  dona  $x^2 - 2x + 1$ .

Fantàstic!

Per tant, us he enganyat, no us havia ensarronat! Sí que podem fer totes les divisions de polinomis amb aquest mètode dels punts i les caselles, fins i tot les que tenen nombres negatius!



Normalment, aquí demano als alumnes que ho provin ells sols, com ara amb

$$\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

(la solució és  $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ ).

També acostumo a presentar ara algunes de les idees infinites de la pròxima experiència. Intenteu presentar el repte següent.



Aquí tenim una imatge del polinomi 1, molt senzill, i el polinomi  $1 - x$ .

$$1 = \dots$$

$$1-x =$$

Podeu calcular  $\frac{1}{1-x}$ ? Podeu interpretar-ne la solució?



La solució que ens dona és  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ , una solució que continua indefinidament. (Podeu veure el vídeo de la lliçó 7.2 aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/>.) Això demostra la famosa fórmula de la sèrie geomètrica, que als llibres de text es presenta normalment així:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Potser poso també aquests «deures opcionals»:

Calculeu  $\frac{1}{1 - x - x^2}$  i a veure si podeu desvelar una seqüència de nombres molt famosa.

**Avís:** Dibuixeu caselles molt grans!

La solució és  $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + \dots$ , on veiem els nombres de Fibonacci.

## Material B: Problema i solució

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 6.*)



## Punts que exploten

### Experiència 6: Totes les bases, i totes alhora: els polinomis

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### Material B: Problema i solució

Podem treballar amb antipunts fins i tot en la divisió de polinomis.

$$x^3 - 3x + 2 =$$

$$x+2 =$$

Aquí teniu uns enuncisats que podeu plantejar, si voleu:

1. Calculeu  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ .
2. Determineu  $\frac{4x^3 - 14x^2 + 14x - 3}{2x - 3}$ .
3. Si podeu fer aquesta operació,  $\frac{4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - x + 1}$ , segurament les podreu fer totes!
4. Aquesta és superdivertida:  $\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$ .

**A part:** Hi ha alguna manera fàcil de treballar amb el mètode de punts i caselles en paper? En lloc de dibuixar caselles i punts, podem treballar amb taules de nombres que incloguin els coeficients? (El terme *sintètic* s'aplica sovint a algorismes en què s'utilitzen un o dos passos menys dels que estem veient aquí.)

5. Podeu deduir quina serà la solució de  $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$  abans de fer l'operació?
6. Calculeu  $\frac{x^4}{x^2 - 3}$ .
7. Proveu amb aquesta, que és una bogeria:  $\frac{5x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 7}{x^3 - 4x + 1}$ .

Si la feu amb paper i llapis, en algun moment estareu intentant dibuixar 84 punts. És fàcil i ràpid escriure el nombre 84? De fet, què us sembla escriure únicament nombres, sense haver de dibuixar cap punt?

## Solucions a les preguntes de «Material B»

$$1. \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = x - 2x + 1.$$

$$2. \frac{4x^3 - 14x^2 + 14x - 3}{2x - 3} = 2x^2 - 4x + 1.$$

$$3. \frac{4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - x + 1} = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1.$$

$$4. \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.$$

5. Com que sabem que  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$ , estic segur que  $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$  dona  $2x + 3 + \frac{1}{x+2}$ . És així? I com interpreteu el residu?

$$6. \frac{x^4}{x^2 - 3} = x^2 + 3 + \frac{9}{x^2 - 3}.$$

$$7. 5x^2 - 2x + 21 + \frac{-14x^5 + 82x - 14}{x^3 - 4x + 1}.$$



## Material C: Exploracions brutals

Utilitzeu el material següent per facilitar-lo als alumnes que vulguin reflexionar després a casa amb preguntes profundes relacionades amb aquesta experiència. NO són deures, és totalment opcional, però podria servir de font per a futurs projectes dels alumnes. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 6.*)

### Punts que exploten

#### Experiència 6: Totes les bases, i totes ahora: els polinomis

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:  
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### Material C: Exploracions brutals

**A sota teniu algunes investigacions sobre «grans preguntes»: podeu explorar-les o bé simplement reflexionar-hi. Divertiu-vos!**

##### EXPLORACIÓ 1: PODEM EXPLICAR UN TRUC ARITMÈTIC?

Us presento una manera atípica de dividir per nou.

Per calcular, per exemple,  $21203 \div 9$ , llegiu «21203» d'esquerra a dreta i aneu calculant les sumes parcials dels dígit:

$$\begin{array}{rcl} 2 & & = 2 \\ 2 + 1 & & = 3 \\ 2 + 1 + 2 & & = 5 \\ 2 + 1 + 2 + 0 & & = 5 \\ 2 + 1 + 2 + 0 + 3 & & = 8 \end{array}$$

I, després, llegiu en veu alta la solució:

$$21203 \div 9 = 2355 R 8$$


De la mateixa manera,

$$1033 \div 9 = 1 \mid 1 + 0 \mid 1 + 0 + 3 \mid R 1 + 0 + 3 + 3 = 114 R 7$$

i

$$2222 \div 9 = 246 R 8$$

Podeu explicar per què funciona aquest truc?

Aquest és el mètode que seguiria jo: per al primer exemple, dibuixeu una imatge de 21203 en una màquina  $1 \leftarrow 10$ , però penseu en el nou com  $10 - 1$ . És a dir, busqueu còpies de  a la imatge.





## EXPLORACIÓ 2: PODEM EXPLORAR LA TEORIA DE NOMBRES?

Utilitzeu una màquina  $1 \leftarrow x$  per calcular:

a)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$       b)  $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$       c)  $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$       d)  $\frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

Podeu veure ara que  $\frac{x^{\text{número}} - 1}{x - 1}$  sempre tindrà una solució ben bonica sense residu?

Una altra manera d'expressar-ho és que

$$x^{\text{nombre}} - 1 = (x - 1) \times (\text{alguna cosa})$$

Per exemple, ja deveu haver vist a l'operació c que  $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ . Això significa que podem dir, per exemple, que segur que  $17^6 - 1$  és múltiple de 16! Com? Decideix que  $x = 17$  en aquesta fórmula per obtenir

$$17^6 - 1 = (17 - 1) \times (\text{alguna cosa}) = 16 \times (\text{alguna cosa})$$

- Expliqueu per què  $999^{100} - 1$  ha de ser múltiple de 998.
- Podeu explicar per què  $2^{100} - 1$  ha de ser múltiple de 3, i múltiple de 15, i múltiple de 31, i múltiple de 1023? (Pista:  $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}$ , i així successivament.)
- És  $x^{\text{nombre}} - 1$  sempre múltiple de  $x + 1$ ? A vegades, si més no?
- El nombre  $2^{100} + 1$  no és primer. És múltiple de 17. Podeu demostrar-ho d'alguna manera?

